1

直線方程式

1-1 直角坐標

1. 在數線上，有 $A(3)$、$B(-5)$、$C(7)$ 三點，求 $\overline{AB}$ 之長度及 $\overline{BC}$ 的中點坐標。

解 $\overline{AB}=|3-(-5)|$

$=|3+5|$

$=8$

$\overline{BC}$ 的中點坐標 $\left(\dfrac{-5+7}{2}\right)=(1)$

2. 數線上兩點 $A\left(-\dfrac{1}{2}\right)$、$B$，且 $\overline{AB}$ 長為 $\dfrac{3}{4}$，求 B 點坐標。

解 令 B 點坐標為 (b)

$\overline{AB}=\left|-\dfrac{1}{2}-b\right|=\dfrac{3}{4}$，解之得 $b=\dfrac{1}{4}$ 或 $-\dfrac{5}{4}$

$\therefore$ B 點坐標為 $\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{5}{4}\right)$

3. 設 $P(-4)$，Q 為數線上兩點，且 $\overline{PQ}$ 之中點坐標為 8，求 Q 點坐標。

解 令 Q 點坐標為 (x)

則 $\overline{PQ}$ 的中點為 $\left(\dfrac{-4+x}{2}\right)=8$，解之得 $x=20$

$\therefore$ Q 點坐標為 (20)

4. 直角坐標系中，若 $A(a,b)$ 在下列各情況下，a 與 b 各有何條件？

(1) 第二象限中 (2) x 軸上 (3) y 軸上

解 (1) $A(a,b)$ 在第二象限中 $\Rightarrow$ $a<0$，$b>0$

(2) $A(a,b)$ 在 x 軸上 $\Rightarrow$ $b=0$，a 為實數

(3) $A(a,b)$ 在 y 軸上 $\Rightarrow$ $a=0$，b 為實數

5. 在數線上，$A(-4)$、$B(11)$，C 點在 A 與 B 之間，且 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:2$，求 C 點坐標。

解 令 $C(x)$

$\overline{AB}=\left|-4-11\right|=15$

已知 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:2$

$\therefore$ $\overline{AC}=\frac{3}{5}\overline{AB}=\frac{3}{5}\times 15=9$ $\Rightarrow$ $\overline{AC}=\left|x-(-4)\right|$

$\because$ C 點在 A 點右側 $\therefore$ $x=5$

$\therefore$ $C(5)$

6. 在數線上，有 $A(-2)$、$B(7)$、$C(x)$ 三點，C 點不在 A 與 B 之間，且 $\overline{AC}:\overline{BC}=5:2$，求 x 的值。

解 已知 $\overline{AC}:\overline{BC}=5:2$

$\overline{AC}$ 較大，故 C 點在 B 點的右側

由圖得知 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$

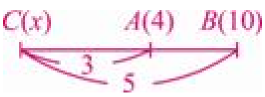
故 $\overline{AB}:\overline{BC}=9:(x-7)=3:2$

$\Rightarrow$ $3(x-7)=9\times 2$

$\Rightarrow$ $3x-21=18$

$\Rightarrow$ $x=13$

解 7. 在數線上，有 $A(4)$、$B(10)$、$C(x)$ 三點，C 點不在 A 與 B 之間，且 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:5$，求 x 的值。



C 點不在 A 與 B 之間

又因為 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:5$

故得知 A 位於 B 與 C 之間，如圖

且 $\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$

因為 $\overline{AB}=\left|10-4\right|=6$，故 $\overline{AC}=9$

C 點位於 A 點的左側，得 $C(-5)$ ，即 $x=-5$

1

直線方程式

1-2 距離公式、分點坐標

1. 求下列$\triangle ABC$之周長：

(1) $A(2,0)$、$B(-8,0)$、$C(3,4)$

(2) $A(1,-1)$、$B(-2,-1)$、$C(-2,3)$

(3) $A(-2,3)$、$B(1,4)$、$C(0,5)$

解 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(2+8)^2+0^2}=10$

$\overline{BC}=\sqrt{(-8-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{137}$

$\overline{AC}=\sqrt{(2-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{17}$

$\triangle ABC$的周長$=10+\sqrt{137}+\sqrt{17}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(-1+1)^2}=3$

$\overline{BC}=\sqrt{(-2+2)^2+(-1-3)^2}=4$

$\overline{AC}=\sqrt{(1+2)^2+(-1-3)^2}=5$

$\triangle ABC$的周長$=3+4+5=12$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{10}$

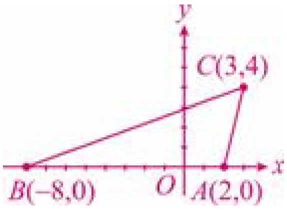
$\overline{BC}=\sqrt{(1-0)^2+(4-5)^2}=\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\sqrt{(-2-0)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{2}$

$\triangle ABC$的周長$=\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\sqrt{10}+3\sqrt{2}$

2. 求出第 1 題中(1)之三角形面積。

提示：可先在坐標平面上畫出圖形後再求解。



解 在坐標平面上，將 A 、 B 、 C 三點標示出來

由圖形得知 $\overline{AB}=10$，

$\triangle ABC$ 的高 $=4$

∴ $\triangle ABC$ 的面積

$=\dfrac{1}{2}\times 10\times 4=20$（平方單位）

3. 求出第 1 題中(2)之三角形面積。

解 由三角形的三邊長為 3 、 4 、 5 得知三角形為直角三角形

所以 $\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{3\times 4}{2}=6$（平方單位）

4. 已知一線段之一端點為 $(-6,18)$，且此線段之中點為 $(1,-1)$，求另一端點的坐標。

設另一端點為 (x,y)，則 解

$$\left(\frac{-6+x}{2},\frac{18+y}{2}\right)=(1,-1)$$

$\Rightarrow$ $x=8$，$y=-20$

∴ 另一端點為 $(8,-20)$

5. 設 $A(8,8)$、$B(-7,9)$、$C(2,-5)$，求 $\triangle ABC$ 的重心坐標。

解 由三角形的重心坐標公式得

$\triangle ABC$ 的重心為 $\left(\dfrac{8+(-7)+2}{3},\dfrac{8+9+(-5)}{3}\right)=(1,4)$

6. 設 $A(2,7)$、$B(-4,5)$、$C(-4,3)$，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，求 D 點坐標。

解 設 D 點坐標為 (x,y)

∵ 平行四邊形的性質：對角線會互相平分

∴ $\overline{AC}$ 的中點 $=$ $\overline{BD}$ 的中點

即 $\left(\dfrac{2-4}{2},\dfrac{7+3}{2}\right)=\left(\dfrac{-4+x}{2},\dfrac{5+y}{2}\right)$

解之，即得 D 點坐標為 $(2,5)$

7. 設 $A(5,8)$、$B(-7,-10)$ 為直角坐標平面上兩點：

(1) 若 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}=3$ ： 1，求 P 點的坐標。

(2) 若 P 在 $\overline{AB}$ 的延長線上，且 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}=3$ ： 1，求 P 點的坐標。

設 $P(x,y)$ 解

(1) P 在 $\overline{AB}$ 上 ∴ P 為 $\overline{AB}$ 的內分點

$x=\dfrac{1\times5+3\times(-7)}{3+1}=-4$

$y=\dfrac{1\times8+3\times(-10)}{3+1}=-\dfrac{11}{2}$

P 的坐標為 $\left(-4,-\dfrac{11}{2}\right)$

(2) P 為 $\overline{AB}$ 的外分點 $\Rightarrow$ B 為 $\overline{AP}$ 的內分點

$-7=\dfrac{1\times5+2\times x}{2+1}$ $\Rightarrow$ $x=-13$

$-10=\dfrac{1\times8+2\times y}{2+1}$ $\Rightarrow$ $y=-19$

P 的坐標為 $(-13,-19)$

1

直線方程式

1-3 函數圖形

1. 設 $f(x)=\begin{cases}5x+3 & ，x\geq 3\\ x^2+3x+1 & ，-1<x<3\\ -2 & ，x\leq -1\end{cases}$ 試求下列函數值：

(1) $f(10)$ (2) $f(0)$ (3) $f(-100)$

提示：當 $x\geq 3$ 時，其函數為 $f(x)=5x+3$；當 $-1<x<3$ 時，其函數為 $f(x)=x^2+3x+1$；當 $x\leq -1$ 時，其函數為 $f(x)=-2$。

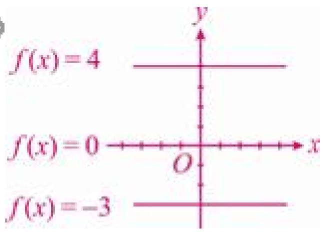
(1) $x=10$ 代入 $f(x)=5x+3$ 得 $f(10)=5\times 10+3=53$

(2) $x=0$ 代入 $f(x)=x^2+3x+1$ 得 $f(0)=0^2+3\times 0+1=1$

(3) $x=-100$ 代入 $f(x)=-2$ 得 $f(-100)=-2$

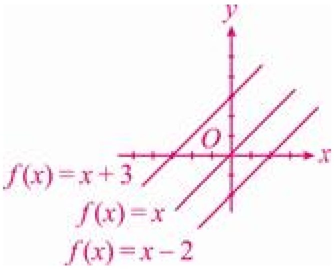
2. 在同一直角坐標平面上，描繪出下列圖形：

(1) $f(x)=4$ (2) $f(x)=0$ (3) $f(x)=-3$



3. 在同一直角坐標平面上，描繪出下列圖形：

解 (1) $f(x)=x$ (2) $f(x)=x+3$ (3) $f(x)=x-2$



4. 在同一直角坐標平面上，描繪出下列圖形：

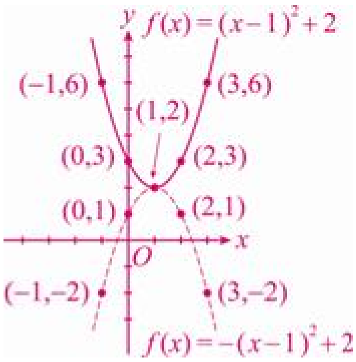
(1) $f(x)=-(x-1)^2+2$ (2) $f(x)=(x-1)^2+2$

解 (1)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	1	2	1	-2

(2)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	3	2	3	6



5. 二次函數 $f(x)=x^2+4x-5$，試求：

(1) $f(x)$ 的頂點坐標

(2) $f(x)$ 與 x 軸的交點坐標

(3) $f(x)$ 與 y 軸的交點坐標

解 (1) 將自變數 x 予以配方，得

$$f(x)=(x^2+4x+4)-4-5=(x+2)^2-9$$

當 $x=-2$時，$f(x)$ 有最小值-9

∴ $f(x)$ 的頂點坐標為$(-2,-9)$

(2) 令 $y=f(x)=0 \Rightarrow x^2+4x-5=0$解之，得 $x=-5$、1

∴ $f(x)$ 與 x 軸的交點為$(-5,0)$、$(1,0)$

(3) 令 $x=0 \Rightarrow y=f(x)=-5$

∴ $f(x)$ 與 y 軸的交點為$(0,-5)$

6. 若$f(x)=-x^2+6x+8$，試求 $f(x)$ 的最大值與最高點坐標。

解 ∵ $f(x)$ 的二次項係數為負的

∴ $f(x)$ 有最大值且圖形有最高點

$$\begin{aligned}f(x)&=-x^2+6x+8\\&=-(x^2-6x)+8\\&=-(x^2-6x+3^2-3^2)+8\\&=-(x-3)^2+3^2+8\\&=-(x-3)^2+17\end{aligned}$$

當 $x=3$時，$f(x)$ 有最大值 17，且圖形最高點為$(3,17)$

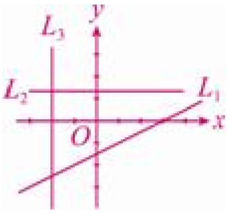
1

直線方程式

1-4 直線的斜率與方程式

1. 求下列各直線的截距、斜率，並將三直線描繪在同一平面坐標上：

(1) $L_1: 2y-x+3=0$ (2) $L_2: 3y-4=0$ (3) $L_3: x+2=0$



解 (1) 令 $x=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}$

令 $y=0 \Rightarrow x=3$

故 L_1 的 x 截距為 3，y 截距為 $-\frac{3}{2}$

L_1 的斜率 $m_1=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

(2) $L_2: y=\frac{4}{3}$

故 L_2 的 y 截距為 $\frac{4}{3}$，沒有 x 截距

L_2 的斜率 $m_2=0$

(3) $L_3: x=-2$

故 L_3 的 x 截距為 -2，沒有 y 截距

L_3 的斜率不存在

2. 設直線 $L:\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1$，試求：

(1) 過點 $(5,3)$ 且平行於 L 的直線方程式

(2) 過點 $(5,3)$ 且垂直於 L 的直線方程式。

解 $L:\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1$ 整理後得 $L:2x-3y=6$

(1) 設平行 $L:2x-3y=6$ 的直線方程式為 $2x-3y=k$

$(5,3)$ 代入 $2x-3y=k \Rightarrow 10-9=k \Rightarrow k=1$

故所求直線為 $2x-3y=1$

(2) 設垂直 $L:2x-3y=6$ 的直線方程式為 $3x+2y=k$

$(5,3)$ 代入 $3x+2y=k \Rightarrow 15+6=k \Rightarrow k=21$

故所求直線為 $3x+2y=21$

3. 設 $A(-1,5)$、$B(3,-7)$，試求：

(1) 直線 AB 的方程式

(2) $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式

解 (1) 利用兩點式，得直線 AB 的方程式

$$\Rightarrow \quad y-5=\frac{(-7)-5}{3-(-1)}(x+1)$$

$$\Rightarrow \quad y-5=-3(x+1)$$

(2) $\overline{AB}$ 的中點為 $(1,-1)$

$\overline{AB}$ 的斜率 $=-3$

$\overline{AB}$ 中垂線的斜率 $=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式為 $y+1=\dfrac{1}{3}(x-1)$

4. 試求滿足下列條件的直線方程式：

(1) x 截距為 4 ，且平行於 $x+3y+4=0$ 。

(2) y 截距為 -1，且垂直於 $2x+3y-4=0$ 。

(3) 過 $x+y=3$ 與 $x-y=1$ 的交點，且垂直於 $2x+y-1=0$ 。

解 (1) 所求直線平行 $x+3y+4=0$

故設所求直線為 $x+3y+k=0$

已知 x 截距為 4 ，故以點 $(4,0)$ 代入上式

$\Rightarrow$ $k=-4$

$\Rightarrow$ 所求直線為 $x+3y-4=0$

(2) 所求直線垂直 $2x+3y-4=0$

故設所求直線為 $3x+(-2)y+k=0$

已知 y 截距為 -1，故以點 $(0,-1)$ 代入上式

$\Rightarrow$ $k=-2$

$\Rightarrow$ 所求直線為 $3x-2y-2=0$

(3) 解聯立方程組 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

$\because$ 所求直線垂直 $2x+y-1=0$

$\therefore$ 設所求直線為 $x+(-2)y+k=0$

將交點 $(2,1)$ 代入，得 $k=0$

所求直線為 $x-2y=0$

5. 設 $L_1: ax+y=a^2$，$L_2: x+ay=1$，若 $L_1 // L_2$，試求 a 之值。

解 $\because$ $L_1 // L_2$ $\therefore$ $\frac{a}{1}=\frac{1}{a}\neq\frac{a^2}{1}$

由 $\frac{a}{1}=\frac{1}{a}$ 解之，得 $a=\pm 1$

但是 $a=1$ 代入，$\frac{a}{1}=\frac{1}{a}\neq\frac{a^2}{1}$ 不成立

故只能取 $a=-1$

6. 設直線 L 與直線 $3x-2y+12=0$ 互相垂直，且 L 的 x 截距與 y 截距和為 10，求直線 L 的方程式。

解 已知 L 垂直直線 $3x-2y+12=0$

$\therefore$ 設 L 為 $2x+3y+k=0$

L 的 x 截距：令 $y=0$ $\Rightarrow$ $x=-\frac{k}{2}$

L 的 y 截距：令 $x=0$ $\Rightarrow$ $y=-\frac{k}{3}$

由題意得知：$\left(-\frac{k}{2}\right)+\left(-\frac{k}{3}\right)=10$ $\Rightarrow$ $k=-\frac{60}{5}=-12$

故 $L: 2x+3y-12=0$

1

直線方程式

自我評量

(E) 1. 數線上 $A(-3)$，且 $\overline{AB}=5$，則 B 點所對應的數為 (A) 5 (B) -8 (C) 2 (D) -2 或 8 (E) 2 或 -8。 【1-1】

(A) 2. 數線上 $A(-17)$、$B(8)$，P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}$: $\overline{BP}=2$: 3，則 P 點所對應的數為 (A) -7 (B) -2 (C) 5 (D) 6 (E) 15。 【1-1】

(B) 3. 平面坐標中，$P(-4,5)$ 至 y 軸之距離為 (A) -4 (B) 4 (C) 5 (D) 1 (E) $\sqrt{41}$。 【1-2】

(C) 4. 平面坐標中，$A(2,5)$、$B(-6,-1)$、$C(1,-2)$，$\overline{AB}$ 的長度為 (A) $5\sqrt{2}$ (B) 100 (C) 10 (D) 5 (E) $4\sqrt{2}$。 【1-2】

(E) 5. 續第 $4.$ 題，在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$ 邊的中線長為 (A) 3 (B) $\sqrt{26}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{17}$ (E) 5。 【1-2】

(B) 6. 續第 $4.$ 題，若 $ABCD$ 為平行四邊形，則 D 點的坐標為 (A) $(-5,6)$ (B) $(9,4)$ (C) $(-7,8)$ (D) $\left(\frac{9}{2},2\right)$ (E) $\left(-\frac{5}{2},3\right)$。 【1-2】

(D) 7. 設 $A(8,9)$、$B(-4,-3)$，若 $P(x,y)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}$: $\overline{BP}=4$: 3，則內分點 P 的坐標為 (A) $(6,1)$ (B) $\left(\frac{20}{7},\frac{15}{7}\right)$ (C) $\left(\frac{8}{7},\frac{40}{7}\right)$ (D) $\left(\frac{8}{7},\frac{15}{7}\right)$ (E) $\left(\frac{1}{7},\frac{9}{7}\right)$。 【1-2】

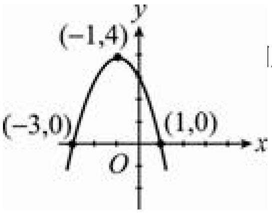
(E) 8. 設 $A(2,-3)$、$B(-4,8)$，若 $P(x,y)$ 在 $\overline{AB}$ 的延長線上，且 $\overline{AP}$: $\overline{BP}=5$: 3，則外分點 P 的坐標為 (A) $\left(\frac{2}{5},\frac{7}{5}\right)$ (B) $\left(-\frac{2}{5},\frac{7}{5}\right)$ (C) $\left(\frac{9}{8},\frac{13}{8}\right)$ (D) $\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ (E) $\left(-13,\frac{49}{2}\right)$。 【1-2】

(E) 9. 設 $A(-6,8)$、$B(9,-13)$，若 $P(x,y)$ 在 $\overline{AB}$ 的延長線上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:5$，則外分點 P 的坐標為 (A) $\left(\frac{11}{7},-\frac{4}{7}\right)$ (B) $\left(-\frac{11}{7},\frac{4}{7}\right)$ (C) $\left(-\frac{4}{3},-\frac{7}{3}\right)$ (D) $(-16,-20)$ (E) $(-16,22)$。 【1-2】

(A) 10. $f(x)=-8$，則 $f(0)+f(-3)=$ (A) -16 (B) -3 (C) 8 (D) 0 (E) 16。 【1-3】

(A) 11. 設 $f(x)=ax+b$，且 $f(1)=3$、$f(2)=5$，則 $f(3)=$ (A) 7 (B) 5 (C) 3 (D) 1 (E) -1。 【1-3】

(D) 12. 下列哪一點在函數 $f(x)=2x^2-4x+7$ 的圖形上？ (A) $(5,-1)$ (B) $(-2,3)$ (C) $(4,2)$ (D) $(2,7)$ (E) $(-1,2)$。 【1-3】



(所示的拋物線，是下列哪一個函數的圖形？ (A) (B) (C) (D) (E) $y=-(x+1)^2-4$。 【1-3】

(A) 14. 若 (D) (E) 。，則 的最小值為 (A) (B) (C) 【1-3】

(D) 15. 若 $f(x)=-x^2+10x+13$，則下列何者正確？ (A) $f(x)$ 有最小值 -12 (B) $f(x)$ 有最大值 -12 (C) $f(x)$ 有最大值 13 (D) $f(x)$ 有最大值 38 (E) $f(x)$ 有最大值 18。 【1-3】

(D) 16. 經過點 $(4,-1)$ 且斜率為 3 的直線方程式為 (A) $x=3$ (B) $3x-y+13=0$ (C) $x-3y+13=0$ (D) $3x-y-13=0$ (E) $y=3x+1$。 【1-4】

(A) 17. 通過 $A(3,-4)$、$B(3,7)$ 兩點的直線方程式為 (A) $x=3$ (B) $y=11$ (C) $x+y+1=0$ (D) $3x-y-2=0$ (E) $x=y$。 【1-4】

(C) 18. 斜率為 -2，且 x 截距為 2 的直線方程式為 (A) $x=2$ (B) $y=-2x+2$ (C) $y=-2x+4$ (D) $2x-y=0$ (E) $x+2y=2$。 【1-4】

(B) 19. 直線 $3x-2y-6=0$ 在兩軸上的截距和為 (A) 1 (B) -1 (C) 6 (D) 5 (E) 4。 【1-4】

(E) 20. 續上題，直線與兩軸所圍成的三角形面積為 (A) 6 (B) -6 (C) 5 (D) 12 (E) 3。 【1-4】

(A) 21. 平行於 $x-y+3=0$ 且經過點 $(-4,-4)$ 的直線方程式為 (A) $x=y$ (B) $x+y=0$ (C) $x-y+4=0$ (D) $y-x+3=0$ (E) $y+x-4=0$。 【1-4】

(C) 22. 垂直於 $3x-y+1=0$ 且經過點 $(2,1)$ 的直線方程式為 (A) $y=3x$ (B) $x+3y+1=0$ (C) $x+3y-5=0$ (D) $3x+y-7=0$ (E) $3x+y-5=0$。 【1-4】

(A) 23. 直線 $y+3=k(x+4)$ 與直線 $x=\frac{2}{3}$ 垂直，則 k 之值為 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) -3。 【1-4】

(B) 24. 設 $A(-1,-2)$、$B(-2,1)$、$C(0,0)$，則過 C 且平行 $\overline{AB}$ 之直線方程式為 (A) $3x+y+5=0$ (B) $3x+y=0$ (C) $x+3y=0$ (D) $3x=y$ (E) $x=3y$。 【1-4】

(C) 25. 垂直於 $2x-3y+1=0$ 且經過點 $(-1,3)$ 的直線方程式為 (A) $2x+3y-7=0$ (B) $3x-2y+9=0$ (C) $3x+2y-3=0$ (D) $3x+2y+3=0$ (E) $3x+y=0$。 【1-4】

(B) 26. 設 $L_1: 2x-3y+4=0$、$L_2: 4x+ay+b=0$，若 $L_1 // L_2$，則 (A) $a=-6$，$b=8$ (B) $a=-6$，$b\neq 8$ (C) $a\neq -6$，$b=8$ (D) $a\neq -6$，$b\neq 8$ (E) $a=6$，$b\neq -8$。 【1-4】

(E) 27. 若 $x+4y=a-1$ 與 $ax-8y=b$ 的圖形表示同一直線，則 $a+b=$ (A) 8 (B) -8 (C) -2 (D) 6 (E) 4。 【1-4】

(C) 28. 若 $x-ay=2$ 與 $ax-4y=4$ 表示兩條平行線，則 $a=$ (A) ± 2 (B) 2 (C) -2 (D) 4 (E) ± 1。 【1-4】

(C) 29. 下列哪一組聯立方程組<u>無解</u>？ (A) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+x+3=0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ y-2x+7=0 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \end{cases}$。 【1-4】